DS de mathématiques n°12

Probabilité, Séries – Corrigé

Noté sur 87,5 pts $\pm 4,5$ pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramené sur 20 en multipliant par $20/87,5$.

/27,5 Exercice 1 : Nature de séries

/5 1) Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1} + \ln n}{n^2 + 2n}$.

On a d'une part $n^2 + 2n \sim n^2$, et d'autre part, par croissances comparées, on a $\ln n = o(\sqrt{n})$, donc en particulier comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$, on a $\ln n = o(\sqrt{n+1})$. Ainsi,

$$\sqrt{n+1} + \ln n \sim \sqrt{n+1}$$

D'où

$$\frac{\sqrt{n+1} + \ln n}{n^2 + 2n} \sim \frac{\sqrt{n+1}}{n^2} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$$

Or, comme $\frac{3}{2} > 1$, on sait que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ CV. Par équivalence de séries à termes

positifs, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1} + \ln n}{n^2 + 2n}$ est convergente.

Barème détaillé :

- **3 points** pour avoir obtenu le bon équivalent (dont 0,5 pour avoir mentionné les "croissances comparées").
- **1 point** pour rappeler pourquoi $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ CV.
- **1 point** pour le fait que la série converge par l'équivalent et parce que les séries sont positives.

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{1}{n \ln(n)^\alpha}$. On s'intéresse à la nature de $\sum_{n \geq 2} u_n$.

/2,5

a) Étudier le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)^\alpha}$, définie sur $]1, +\infty[$.

f est dérivable comme quotient et composée de telles fonctions. Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\ln(x)^\alpha + x\alpha \ln(x)^{\alpha-1} \frac{1}{x}}{(x \ln(x)^\alpha)^2} \\ &= -\frac{\ln(x)^\alpha + \alpha \ln(x)^{\alpha-1}}{(x \ln(x)^\alpha)^2} \end{aligned}$$

Or, $\ln(x)^\alpha$ et $\alpha \ln(x)^{\alpha-1}$ sont positifs, donc $f' \leq 0$. On en déduit que f est décroissante.

Barème détaillé :

- **0,5 point** pour justifier que f est dérivable.
- **1 point** pour l'expression correcte de $f'(x)$.
- **1 point** pour le sens de variation de f .

/4

b) En déduire un encadrement de $\sum_{n=3}^N u_n$ pour tout entier $N \geq 3$.

Comme f est décroissante par la question précédente, pour tout $n \geq 3$, on a :

$$\int_{n-1}^n f(x) dx \leq f(n) = u_n \leq \int_n^{n+1} f(x) dx$$

Donc en sommant les inégalités ci-dessus pour n allant de 3 à N , on a :

$$\int_2^N f(x) dx \leq \sum_{n=3}^N u_n \leq \int_3^{N+1} f(x) dx$$

Barème détaillé :

- **2,5 points** pour l'inégalité sur u_n par décroissance de f .
- **1,5 point** pour l'encadrement de $\sum_{n=3}^N u_n$.

c) On suppose $\alpha = 1$. Montrer que $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge. En déduire la nature de

$\sum_{n \geq 2} u_n$ si $\alpha < 1$.

On suppose $\alpha = 1$. On sait que pour tout $N \geq 3$, on a :

$$\sum_{n=3}^N u_n \geq \int_2^N f(x) dx$$

Or :

$$\int_2^N f(x) dx = \int_2^N \frac{1}{x \ln(x)} dx = [\ln(\ln x)]_2^N = \ln(\ln(N)) - \ln(\ln 2)$$

En particulier, $\int_2^N f(x) dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$. Par comparaison en utilisant la question précédente, on en déduit que

$$\sum_{n=3}^N u_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$$

et donc $\sum_{n \geq 3} u_n$ DV. On en déduit que $\sum_{n \geq 2} u_n$ DV.

Supposons $\alpha < 1$. On remarque que pour tout $n \geq 3$, on a $\ln n \geq 1$, si bien que $(\ln n)^\alpha \leq \ln n$. Ainsi (pour tout $n \geq 3$)

$$u_n = \frac{1}{n \ln(n)^\alpha} \geq \frac{1}{n \ln n}$$

Or, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ DV par ce qui précède. Par comparaison, on en

conclut que $\sum_{n \geq 3} u_n$ DV ou encore que $\sum_{n \geq 2} u_n$ DV.

Barème détaillé :

- **1 point** pour avoir eu l'idée de travailler sur $\int_2^N f(x) dx$ pour exploiter l'encadrement.
- **2 points** pour le calcul de $\int_2^N f(x) dx$ et sa limite quand $N \rightarrow +\infty$.
- **1 point** pour la divergence de $\sum_{n \geq 2} u_n$.
- **4 points** pour le cas $\alpha < 1$.

d) On suppose $\alpha > 1$. Montrer que $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

On suppose $\alpha > 1$. On sait que pour tout $N \geq 3$, on a :

$$\sum_{n=3}^N u_n \leq \int_3^{N+1} f(x) dx$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_3^{N+1} f(x) dx &= \int_3^{N+1} u'(x) u^{-\alpha}(x) dx \\ &= \left[\frac{1}{-\alpha + 1} u^{-\alpha+1}(x) \right]_3^{N+1} \\ &= \left[\frac{1}{1 - \alpha} \times \ln(x)^{1-\alpha} \right]_3^{N+1} \\ &= \frac{1}{1 - \alpha} \times \ln(N+1)^{1-\alpha} - \frac{1}{1 - \alpha} \times \ln(2)^{1-\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha - 1} \ln(2)^{1-\alpha} - \frac{1}{\alpha - 1} \times \frac{1}{\ln(N)^{\alpha-1}} \\ &\leq \frac{1}{\alpha - 1} \ln(2)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Ainsi, $\int_3^{N+1} f(x) dx$ est majorée (indépendamment de N), donc il en va

de même pour $\sum_{n=3}^N u_n$. Comme la série $\sum_{n \geq 3} u_n$ est à termes positifs et qu'on a majoré la somme partielle, on en déduit la convergence de $\sum_{n \geq 3} u_n$, donc

celle de $\sum_{n \geq 2} u_n$.

Barème détaillé :

- **1 point** pour avoir eu l'idée de travailler sur $\int_3^{N+1} f(x) dx$ pour exploiter l'encadrement.
- **4 points** pour le calcul de $\int_3^{N+1} f(x) dx$.
- **3 points** pour la convergence de $\sum_{n \geq 2} u_n$ par majoration.

/60 Exercice-Problème 2 : Le forain ingénieux

Soit n un entier naturel non nul. Dans une fête foraine, Tobias propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de pile obtenus. Si ce nombre de piles est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.

Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque pile obtenu. En particulier, s'il n'obtient aucun pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est égale à p (avec $p \in]0, 1[$), et celle d'obtenir face est de $1 - p$.

On notera X la variable aléatoire égale au nombre de pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain (en euros) du joueur. Enfin, on notera A l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si $\mathbb{E}(G) > 0$.

/17 Partie I. Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \frac{2}{3}$.

/5 1) Reconnaître la loi de X et vérifier que $\mathbb{P}(A) = \frac{13}{27}$.

On reconnaît que $X \sim \mathcal{B}\left(3, \frac{2}{3}\right)$, i.e. que X suit une loi binômiale de paramètres 3 et $\frac{2}{3}$. De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(X \in 2\mathbb{N} \cap \llbracket 0, 3 \rrbracket) \\ &= \mathbb{P}(X \in \{0, 2\}) \\ &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 2) \\ &= (1 - p)^3 + 3 \times p^2(1 - p) \\ &= \frac{1}{27} + 3 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27} + \frac{4}{9} \\ &= \frac{13}{27} \end{aligned}$$

Barème détaillé :

- **1 point** pour dire que X suit une loi binômiale.
- **1,5 point** pour l'expression de $\mathbb{P}(X = k)$.
- **2,5 points** pour le calcul de $\mathbb{P}(A)$

/7 2) Montrer que $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G .

Comme $n = 3$, le joueur ne peut obtenir que 0, 1, 2 ou 3 piles.

- S'il obtient 0 pile, alors il gagne 0×10 euros, donc G vaut 0.
- S'il obtient 1 pile, alors il perd 1×10 euros, donc G vaut -10 .
- S'il obtient 2 piles, alors il gagne 2×10 euros, donc G vaut 20.
- S'il obtient 3 piles, alors il perd 1×30 euros, donc G vaut -30 .

Finalement, $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$. Déterminons maintenant la loi de G :

- $\mathbb{P}(G = -30) = \mathbb{P}(X = 3) = p^3 = \frac{8}{27}$
- $\mathbb{P}(G = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = (1 - p)^3 = \frac{1}{27}$
- $\mathbb{P}(G = 20) = \mathbb{P}(X = 2) = 3p^2(1 - p) = 3 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$
- $\mathbb{P}(G = -10) = \mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbb{P}(X \neq 1) = 1 - \frac{1}{27} - \frac{12}{27} - \frac{8}{27} = \frac{6}{27}$

Barème détaillé :

- **3 points** pour le détail de $G(\Omega)$.
- **4 points** pour les calculs des quatre valeurs de $\mathbb{P}(G = k)$ pour tout $k \in G(\Omega)$.

/5 3) Calculer l'espérance de G . Le jeu est-il favorable au joueur ?

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(G) &= \sum_{k \in G(\Omega)} k\mathbb{P}(G = k) \\ &= -30 \times \frac{8}{27} - 10 \times \frac{6}{27} + 0 + 20 \times \frac{12}{27} \\ &= \frac{10}{27}(-3 \times 8 - 6 + 2 \times 12) \\ &= \boxed{\frac{60}{27}}\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}(G) < 0$, le jeu n'est pas favorable au joueur.

Barème détaillé :

- **2 points** pour la formule de $\mathbb{E}(G)$.
- **2 points** pour le calcul de $\mathbb{E}(G)$.
- **1 point** pour la conclusion que le jeu n'est pas favorable.

/19 Partie II. Tobias constate que son jeu n'est pas attractif car les joueurs se rendent compte que $\mathbb{P}(A) < \frac{1}{2}$, c'est-à-dire qu'ils ont plus de chances de perdre que de gagner.

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est entier naturel non nul et $p \in]0, 1[$. Tobias cherche les conditions sur p et n pour qu'il puisse mettre un affichage « à ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et ce sans que ce soit mensonger car Tobias est un honnête homme.

4) Dans la suite, on pose Y la variable aléatoire définie par $Y = (-1)^X$.

a) On note $Z = \frac{Y+1}{2}$. Montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

Y est à valeurs dans $\{-1, 1\}$ donc Z est à valeurs dans $\{0, 1\}$. De plus

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}\left(\frac{Y+1}{2} = 1\right) = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X \in 2\mathbb{N}) = \mathbb{P}(A)$$

tandis que $\mathbb{P}(Z = 0) = 1 - \mathbb{P}(Z = 1) = 1 - \mathbb{P}(A)$. Ainsi, Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

Barème détaillé :

- **1,5 point** pour dire que Z est à valeurs dans $\{0, 1\}$
- **1,5 points** pour le paramètre $\mathbb{P}(A)$.

/3 b) Démontrer que $\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{P}(A) - 1$.

On a $Y = 2Z - 1$, ainsi :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(2Z - 1) = 2\mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(1) = \boxed{2\mathbb{P}(A) - 1}$$

car Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$ par la question précédente.

Barème détaillé :

- **2 points** pour l'expression de $\mathbb{E}(Y)$ en fonction de $\mathbb{E}(Z)$.
- **1 point** pour le fait que $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{P}(A)$ car $Z \sim \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$.

/5 5) Donner la loi de X et en déduire que $\mathbb{E}(Y) = (1 - 2p)^n$.

On constate que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Ainsi, par la formule de transfert, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}((-1)^X) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k)(-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} (-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (-p + 1 - p)^n \\ &= (1 - 2p)^n\end{aligned}$$

Barème détaillé :

- **1 point** pour reconnaître la loi de X .
- **1 point** pour l'application de la formule de transfert.
- **3 points** pour le reste du calcul.

/2 6) Exprimer alors la valeur de $\mathbb{P}(A)$ en fonction de n et p .

Par les deux questions précédentes, on a :

$$2\mathbb{P}(A) - 1 = \mathbb{E}(Y) = (1 - 2p)^n$$

donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2}$$

Barème détaillé : 2 points pour la question.

7) Démontrer que :

$$\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2} \iff \left[p \leq \frac{1}{2} \text{ ou } n \text{ est pair} \right]$$

Par la question précédente,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2} &\iff \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2} \geq \frac{1}{2} \\ &\iff (1 - 2p)^n \geq 0 \end{aligned}$$

Montrons à présent que $(1 - 2p)^n \geq 0$ si et seulement si $p \leq \frac{1}{2}$ ou n est pair par double implication :

• Montrons le sens réciproque.

– Si $p \leq \frac{1}{2}$, on a $1 - 2p \geq 0$ donc $(1 - 2p)^n \geq 0$ (par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$).

– Si $n \in 2\mathbb{N}$, on a évidemment $(1 - 2p)^n \geq 0$.

Ainsi, si $p \leq \frac{1}{2}$ ou n est pair, alors $\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2}$.

• Montrons le sens direct. Par contraposée, il suffit de montrer que si $p > \frac{1}{2}$ et n impair, alors $(1 - 2p)^n < 0$. Or, si $p > \frac{1}{2}$, on a $1 - 2p < 0$, donc comme n est impair, on a $(1 - 2p)^n < 0$. Ainsi, $\mathbb{P}(A) < \frac{1}{2}$.

Finalement, on a bien montré l'équivalence.

Barème détaillé :

• 3 points pour le sens direct. Attention aux erreurs de logique !

• 3 points pour le sens réciproque. Attention aux erreurs de logique !

/24 **Partie III.** Tobias souhaite cependant s'assurer que, tout en laissant son jeu attractif (c'est-à-dire en faisant en sorte que $\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est-à-dire que $\mathbb{E}(G) \leq 0$).

8) Exprimer G en fonction de X . En déduire que :

$$\mathbb{E}(G) = 10 \sum_{k=0}^n (-1)^k k \mathbb{P}(X = k)$$

/5

On a

$$G = \begin{cases} 10X & \text{si } X \text{ est pair} \\ -10X & \text{si } X \text{ est impair} \end{cases}$$

d'où on peut réécrire $G = 10(-1)^X X$. Comme X est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, on a par la formule de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G) &= \sum_{k=0}^n 10(-1)^k k \mathbb{P}(X = k) \\ &= 10 \sum_{k=0}^n (-1)^k k \mathbb{P}(X = k) \end{aligned}$$

Barème détaillé :

• 4 points pour l'expression de G en fonction de X .

• 1 point pour l'expression de $\mathbb{E}(G)$.

9) Démontrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

/2

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\begin{aligned} k \binom{n}{k} &= k \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \end{aligned}$$

et par ailleurs

$$\begin{aligned} n \binom{n-1}{k-1} &= n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \end{aligned}$$

d'où l'égalité voulue.

Barème détaillé : 2 points pour la question.

10) Montrer que :

$$\mathbb{E}(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G) &= 10 \sum_{k=0}^n (-1)^k k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= 0 + 10 \sum_{k=1}^n (-1)^k k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= 10n \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= 10n \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} \binom{n-1}{j} p^{j+1} (1-p)^{n-j-1} \\ &= -10np \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j} \\ &= -10np (1-2p)^{n-1} \end{aligned}$$

Barème détaillé : 5 points pour la question.

11) Démontrer alors que :

$$\left(\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{E}(G) \leq 0 \right) \iff p \leq \frac{1}{2}$$

/6

On procède par double implication.

- Supposons $p \leq \frac{1}{2}$. Alors on a vu en question 7) que $\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2}$. De plus $1-2p \geq 0$ donc on a $(1-2p)^{n-1} \geq 0$, de sorte que

$$\mathbb{E}(G) = -10np(1-2p)^{n-1} \leq 0$$

- Réciproquement, on suppose $\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2}$ et $\mathbb{E}(G) \leq 0$. En particulier comme $\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2}$, on a $p \leq \frac{1}{2}$ ou $n \in 2\mathbb{N}$. Supposons par l'absurde que $p > \frac{1}{2}$. Alors nécessairement $n \in 2\mathbb{N}$. Mais dans ce cas, comme $n-1$ est impair et $1-2p < 0$, on a

$$(1-2p)^{n-1} < 0$$

Ainsi, comme $p > 0$ et $n > 0$, on a $\mathbb{E}(G) = -10np(1-2p)^{n-1} > 0$.

Contradiction car $\mathbb{E}(G) \leq 0$. Ainsi, on a bien $p \leq \frac{1}{2}$.

Barème détaillé :

- 2 points pour le sens direct. Attention aux erreurs de logique !
- 4 points pour le sens réciproque. Attention aux erreurs de logique !

/3,5 12) a) Étudier la fonction $f : x \mapsto x(1-2x)^{n-1}$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

f est dérivable comme polynôme. Pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1-2x)^{n-1} + (n-1)x(-2)(1-2x)^{n-2} \\ &= (1-2x)^{n-2} \times (1-2x + (n-1) \times (-2x)) \\ &= (1-2x)^{n-2} \times (1-2nx) \end{aligned}$$

Or, $1-2x \geq 0$, si bien que

$$f'(x) \geq 0 \iff 1-2nx \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{2n}$$

Ainsi, f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}\right]$ (réduit à $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ si $n = 1$).

Barème détaillé :

- **0,5 points** pour la dérivabilité de f .
- **1 point** pour le calcul de f' .
- **1,5 point** pour le sens de variation de f .

b) Pour une valeur de n fixée, comment Tobias doit-il truquer sa pièce, c'est-à-dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, pour optimiser la rentabilité de son activité ? Que vaut alors $\mathbb{E}(G)$ pour cette valeur de p ?

On veut minimiser $\mathbb{E}(G)$. Alors on cherche le maximum de f sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Or, d'après les variations de f trouvées en question précédente, ce maximum est atteint en $x_0 = \frac{1}{2n}$. On doit donc choisir $p_n = \frac{1}{2n}$. On a ainsi

$$\mathbb{E}(G) = -5 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

Barème détaillé :

- **2 points** pour la valeur p_n en lequel on atteint le minimum.
- **1 point** pour la valeur de $\mathbb{E}(G)$ pour $p = p_n$.